MINISTERE DE L'INDUSTRIE ET DE LA RECHERCHE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE

DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES 1984

ET DES MINES D'ALES

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Les Candidats doivent traiter le problème I et II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées :

- *feuille rose pour le problème I*
- *feuille bleue pour le problème II*

N.B. : *Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.*

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaires, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toutes autres documentations sont interdites.

PROBLEME 1

I. - Questions préliminaires

1) Soit g la fonction numérique de la variable réelle telle que :

$$g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln|x| \qquad (\ln \text{ désigne le logarithme néperien})$$

Etudier les variations de g ; en déduire le signe de g(x).

Montrer en particulier qu'il existe un réel négatif unique α tel que $g(\alpha) = 0$; donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

2) Soit h la fonction numérique de la variable réelle définie pour $x > 1$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} \ln x = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

Montrer que : $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^3} u(x)$

u fonction numérique de la variable réelle définie pour $x > 1$.

Etudier les variations de u, en déduire le signe de u(x) et celui de h'(x) pour $x > 1$.

II. - Soit f la fonction numérique de la variable réelle telle que :

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes du domaine de définition.

Montrer que f peut être prolongée par continuité pour $x = 1$; on appellera toujours f la fonction ainsi déterminée.

2) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de $x = 1$

En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ à la courbe représentative de f ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

3) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

4) Construire la courbe représentative de f sur un repère orthonormal (unité : 2 cm)

Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de f(x) pour $x \in \{-1, \frac{3}{2}, 2, 4$

III. - On se propose d'étudier la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 4$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(u_{n-1})$$

.../...

P 1981

1) Montrer qu'il existe un réel $q \in]0,1[$ tel que la fonction f admette une dérivée f' vérifiant pour tout réel $x \geqslant \frac{3}{2}$:

$$|f'(x)| \leqslant q$$

(on remarquera : $f'(x) = f(x) \cdot h(x)$)

2) Montrer qu'il existe un réel L unique supérieur à $\frac{3}{2}$ tel que :

$$L = f(L)$$

Préciser la valeur de L.

3) En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[u_{i-1}, L]$ montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_i - L| \leqslant q\,|u_{i-1} - L|.$$

4) Déduire des résultats précédents que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME 2

Un espace vectoriel euclidien réel E est rapporté à la base orthonormée directe $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le vecteur normé $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ de E. Soient D la droite vectorielle orientée par $\vec{n}$ et P le plan vectoriel orthogonal à D (P orienté corrélativement à D).

A. - On désigne par p et q les endomorphismes de E qui à tout vecteur $\vec{v}$ de E associent respectivement sa projection orthogonale sur D et sa projection orthogonale sur P.

1°) Démontrer que : $\forall \vec{v} \in E \quad p(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{n})\,\vec{n}$

2°) Déterminer les matrices respectives de p et q relatives à la base B en fonction des réels a, b et c.

B. - Soit ν l'application de E vers E qui à tout vecteur $\vec{v}$ de E associe le produit vectoriel $\nu(\vec{v}) = \vec{n} \wedge \vec{v}$

1°) Démontrer que ν est un endomorphisme de E dont on déterminera le noyau et l'image.

2°) Construire la matrice de ν relative à la base B.

3°) Vérifier que : $\nu \circ q = \nu$. Comparer les normes de $\nu(\vec{v})$ et de $q(\vec{v})$ et indiquer l'angle des vecteurs $q(\vec{v})$ et $\nu(\vec{v})$.

4°) Démontrer que $\nu \circ \nu = -q$ et en déduire que :

$$\forall \vec{v} \in E \qquad \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{v}) = (\vec{n} \cdot \vec{v})\,\vec{n} - \vec{v}$$

C. - Soit f l'application de E vers E définie par $f = p + \nu$

1°) Justifier que f est un endomorphisme de E.

2°) Déterminer le noyau de f. Que peut-on en déduire pour f ?

3°) Donner la matrice de f relative à la base B. Vérifier que celle-ci est orthogonale.

4°) Démontrer que $f(\vec{n}) = \vec{n}$ et caractériser la restriction de f à P (on pourra utiliser les résultats établis en B)$_{3e}$). En déduire la nature et les éléments de f.

5°) On note $d = f \circ f$ et on pose $s = -d$

a) Démontrer que : $\forall \vec{v} \in E \qquad d(\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \vec{n})\,\vec{n} - \vec{v}$

En déduire les matrices respectives de d et s relatives à la base B

b) Caractériser les applications d et s en précisant les éléments remarquables.